平成13 年度水理B 及び同演習試験解答

$\boxed{1}$　橋脚などの円柱構造物の単位長さ当たりに作用する力を模型実験によって求めようとしたが，水不足のために風洞実験により求めた．空気と水の密度は違うものの，相似則によりこのような代用が可能である．関連する物理量は，円柱の直径d，流速U，流体の密度$\boldsymbol{r}$，粘性係数m，抗力Dである．

(1) 抗力Dと流速Uの関係を表す式を，次元解析を用いて導け．
(2) 風洞実験と同条件で水槽実験を行った場合，抗力Dは何倍になるか．なお，空気と水の密度はそれぞれ$1.3\times10^{-3}\,g/cm^3$，$1.0g/cm^3$とする．
(3) 水槽実験での抗力と同じ抗力を風洞実験で得るには，流速を何倍に設定すればよいか．
(4) 風洞実験において$d=10cm$，$U=3.0m/s$と設定して実験を行ったら，$D=2.7N/m$という結果が得られた．実際架橋する橋脚の直径は$1.5m$である．川の流速が$2.0m$の時に橋脚にかかる力を求めよ．

解答

(1) 物理量：$d, U, \boldsymbol{r}, m, D$，　基本量：$[L],[M],[T]$

$$D=f\left(d,U,\boldsymbol{r},m\right)$$

指数形の関係を仮定すると，

$$D=kd^xU^y\boldsymbol{r}^zm^a \quad （k:\text{無次元の定数}）$$

両辺の次元は等しいから，

$$\left[MLT^{-2}/L\right]=\left[L\right]^x\left[LT^{-1}\right]^y\left[ML^{-3}\right]^z\left[ML^{-3}L^2T^{-1}\right]^a$$

$$\left.\begin{array}{l} L;x+y-3z-\boldsymbol{a}=0 \\ M;z+\boldsymbol{a}=1 \\ T;-y-\boldsymbol{a}=-2 \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} x=1-\boldsymbol{a} \\ y=2-\boldsymbol{a} \\ z=1-\boldsymbol{a} \end{array}\Rightarrow \frac{D}{\boldsymbol{r}U^2d}=k\left(\frac{\boldsymbol{r}Ud}{m}\right)^{-a}$$

$$\therefore \frac{D}{\boldsymbol{r}U^2d}=f\left(\frac{\boldsymbol{r}Ud}{m}\right)$$

(2) (1)で得られた式の左辺は無次元量で，風洞実験と水槽実験は等しい．

$$\frac{D_a}{\boldsymbol{r}_aU_a{}^2d_a}=\frac{D_w}{\boldsymbol{r}_wU_w{}^2d_w}$$

同条件で実験を行っているので，

$$\frac{D_a}{\boldsymbol{r}_a}=\frac{D_w}{\boldsymbol{r}_w}\Rightarrow D_w=\frac{\boldsymbol{r}_w}{\boldsymbol{r}_a}D_a$$

$$\therefore \frac{\boldsymbol{r}_w}{\boldsymbol{r}_a}=769.23 \qquad 7.7\times10^2\text{倍}$$

(3) (2)と同様に，

$$\frac{D_a}{\boldsymbol{r}_aU_a{}^2d_a}=\frac{D_w}{\boldsymbol{r}_wU_w{}^2d_w}$$

$$\frac{U_w{}^2}{U_a{}^2}\cdot\frac{r_w}{r_a}=1$$

$$\frac{U_w}{U_a}\cdot\sqrt{\frac{r_w}{r_a}}=1$$

$$U_a=U_w\cdot\sqrt{\frac{r_w}{r_a}}$$

$$\therefore\sqrt{\frac{r_w}{r_a}}=27.73 \quad 2.8\times10倍$$

(4) (2)と同様に，

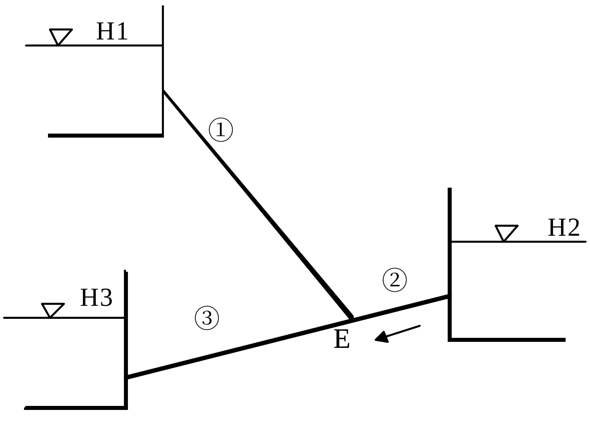
$$\frac{D_a}{r_a U_a{}^2 d_a}=\frac{D_w}{r_w U_w{}^2 d_w}$$

$\boxed{2}$ 以下の文章を読んで，下の問題に答えよ．

パイプの中を水が流れる場合，管壁と水の間に摩擦が働くし，水同士の間にも摩擦が働く．水は<u>ニュートン流体</u>(2)なので，一様断面なら摩擦がした仕事分だけ流れのエネルギーが減ることになる．

このエネルギー損失を求めるために，ダルシーワイズバッハの式が用いられる．このとき，摩擦損失係数 f は<u>　　　　　図表</u>(1)によってレイノルズ数と粗度から求めることが出来る．この図表を用いる際，気をつけるのは，<u>層流と乱流</u>(3)によって見るグラフが違うことである．

実際に以下のようにパイプを接続した．損失は摩擦だけ考えると，②のパイプを流れる流速は③のタンク方向を正とした場合，<u>　　　　　m/s</u>(4)である．



管長 l1=1000m, l2=200m, l3=1000m
管径 D=0.20m, 管の摩擦係数 f=0.03
水位 H1=15m, H2=10m, H3=8m

(1)　下線(1)の図表名を答えよ．
(2)　ニュートン流体とは何か？
(3)　管径にそった方向の流速分布は，層流と乱流の場合でどう違うか？
(4)　管②に流れる<u>流速</u>を求めよ．なお，有効数字は小数第一位までで良い．
（ヒント：接合点のエネルギーを繰り返し与えて計算する）

(1)ムーディ図表

(2)せん断応力 t が流速勾配に比例する流体のことで，$t=-m\frac{\partial u}{\partial y}$ が成立する．但し，m は

粘性係数，u は流速で，y は u に直交する座標．
(3)層流は放物線，乱流は対数曲線分布する．
(4)結合点 E のエネルギーを H とするとそれぞれのベルヌイ式は，

$$H_1 - H = f\frac{l_1}{D}\frac{v_1^{\ 2}}{2g},\quad H_2 - H = f\frac{l_2}{D}\frac{v_2^{\ 2}}{2g},\quad H - H_3 = f\frac{l_3}{D}\frac{v_3^{\ 2}}{2g}$$

管径が同じなので連続の式は，

$$v_1 + v_2 = v_3$$

今，H_E が H_2 と同じ高さにあるとすると，H_E=10m，v_2=0m/s

$v_1 = 0.8$ m/s，$v_3 = 0.5$ m/s．よって分流となる．そこで，H_E

を順に変えて，ベルヌイの式に代入し，連続の式から得られた流速の誤差が最も小さいものを選ぶ．

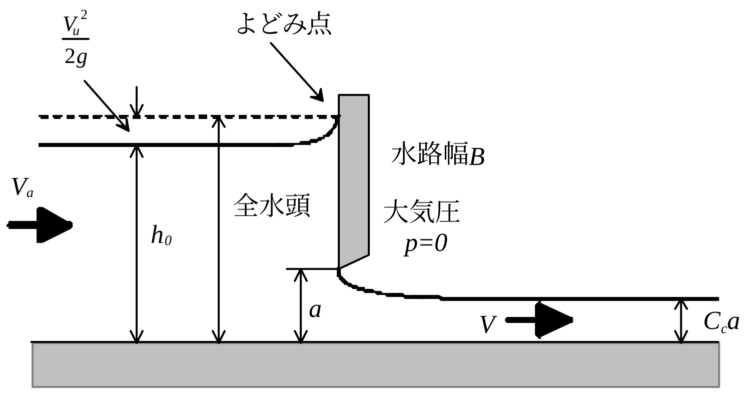
H_E=11m で，$(v_1, v_2, v_3) = (0.62, 0.72, 0.8)$，

H_E=10.5m で，$(v_1, v_2, v_3) = (0.77, 0.57, 0.26)$

H_E=10.4m で，$(v_1, v_2, v_3) = (0.75, 0.51, 0.23)$

よって，求める流速 v_2 =－0.23m/s.

3 下の図に示す水門を通過する流れを考える．
1）水門の上流と下流とでのエネルギー保存の式（ベルヌーイ式）を，図中の記号を用いて示せ．
2）流量の保存の式を示せ．
3）上の結果から，上流側水深h_0，水門開度aから流量Qを計算する式を導け．
4）幅B=4m，h_0=5.37m，a=0.5m，Cc＝0.611の時，流量Qはいくらか．
5）上流から入ってくる運動量フラックスと下流から出てゆく運動量フラックスの差から，水門働く全水圧を，4)の条件で計算せよ．その向きも示せ．力の単位に気をつけること



1) $$\frac{V_a^{\ 2}}{2g} + h_0 = \frac{V^2}{2g} + C_c a$$

2) $$h_0 V_a = C_c a V$$

3)　1)の式より　$V^2 = V_a{}^2 + 2g(h_0 - C_c a)$　これを 2)の式に代入して整理すると

$V_a{}^2 = \dfrac{2gC_c{}^2 a^2}{h_0 + C_c a}$　　これを　$Q = h_0 V_a B$　に代入　　　$Q = h_0 C_c aB\sqrt{\dfrac{2g}{h_0 + C_c a}}$

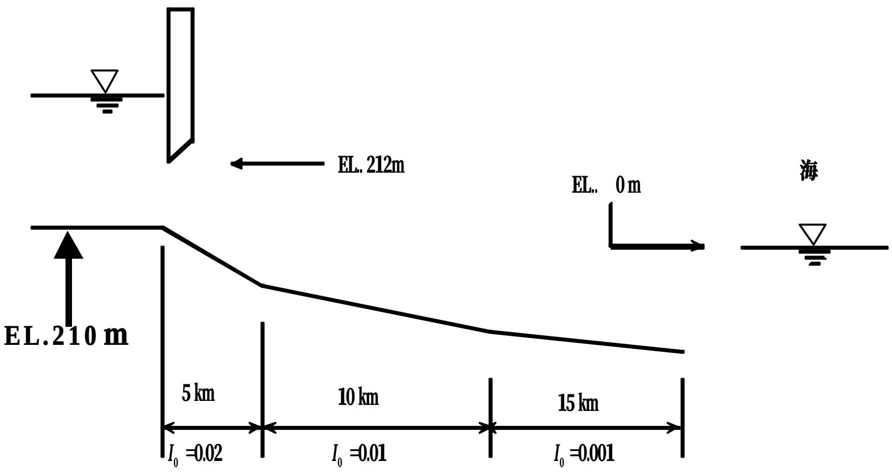
4)　12.2(m^3/s)

5)　水門に働く全水圧を F とする

$$rQV - rQV_a = \frac{1}{2}rgh_0{}^2 B - \frac{1}{2}rg(C_c a)^2 B - F$$

$$F = 4.49 \times 10^5 (N)$$

4　ある河川の縦断形状を下図に示す．上流のダムから毎秒 100m^3 の水を放流したときの水面系の概略を示せ．川幅は 10mで一様とし，河道の粗度係数は$n = 0.025$ とせよ．



A、B、C、D を決める．
＜AB 間＞

$$h_n = \left(\frac{n^2 q^2}{I_0}\right)^{\frac{3}{10}} = \left(\frac{0.025^2 \times 10^2}{0.02}\right)^{\frac{3}{10}} = 1.408 \qquad h_c = \sqrt[3]{\frac{10^2}{9.8}} = 2.169$$

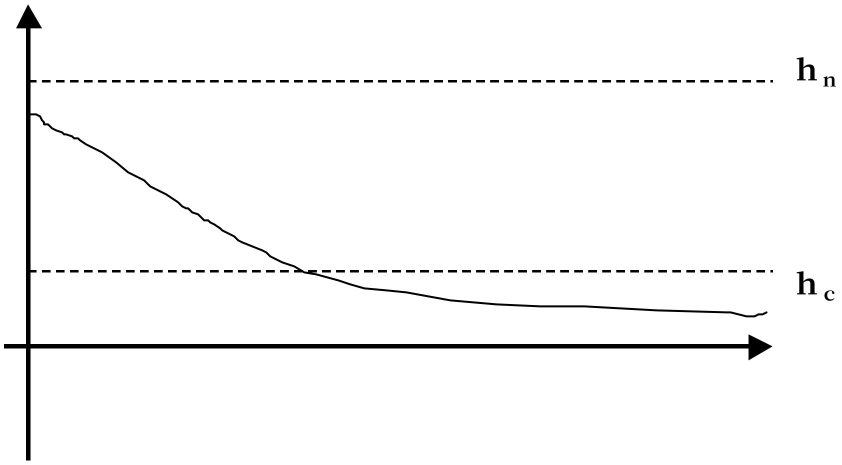
＜BC 間＞

$$h_n = \left(\frac{0.025^2 \times 10^2}{0.01}\right)^{\frac{3}{10}} = 1.733 \qquad h_n = 2.169$$

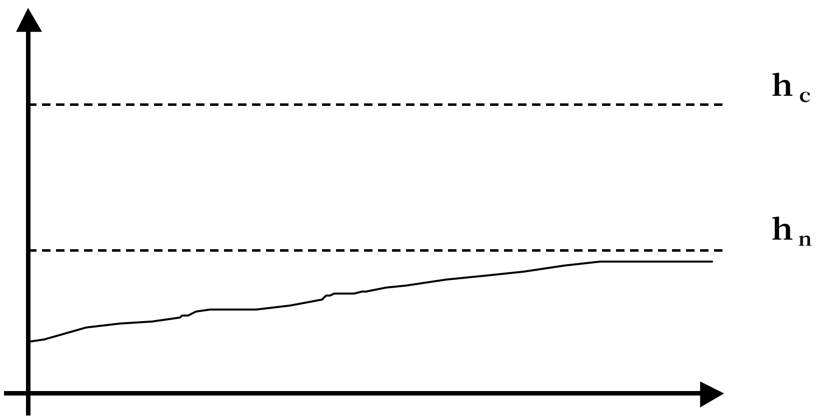
＜CD 間＞

$$h_n = \left(\frac{0.025^2 \times 10^2}{0.001}\right)^{\frac{3}{10}} = 3.458 \qquad h_n = 2.169$$

＜AB 間＞



＜BC 間＞



＜CD 間＞