平成14年度水理B及び同演習試験（H14.7.17）

番号	名前

：注意：

計算機のみ持込可である．1 問の解答は問題用紙の裏表を使ってすること．2 枚以上必要な場合は申し出ること．全ての解答用紙に学籍番号と名前を記入すること．

$\boxed{1}$ 自動車の空力特性に関する研究手法の一つに，風洞実験がある．実験では自動車の縮小模型を風洞内に入れて風を吹かせ，模型にかかる抗力を測定する．風洞実験において重要となる物理量は，空気の密度 r (= 1.2 kg/m^3)，風速 U (m/s)，模型の代表長さスケール L (m)，模型に働く抗力 D (N)，空気の動粘性係数 n (= 1.5 x 10^{-5} m^2/s)である．次の問いに答えよ．（25 点）

1) この現象を支配する無次元パラメータを全て求めよ．

2) 時速 108 km で走る（時速 108 km の風が当たる）自動車に働く抗力を調べたい．10 分の 1 の模型を用い，相似則にしたがった（無次元パラメータを全て合わせた）実験を行うためには，風洞の風速をどんな値に設定すればよいか？また実験で得られた抗力を D とすると，実際の自動車に働く抗力はどのように表されるか？

3) 空気流の代わりに水流を使った場合について 2)の問いに答えよ．ちなみに水の密度は 1000 kg/m^3，水の動粘性係数は 1.0 x 10^{-6} m^2/s である．

（解答）

1) 物理量は，r, U, L, D, n の5個，それぞれの次元は r:[ML^{-3}], U:[LT^{-1}], L:[L], D:[MLT^{-2}], n:[L^{2}T^{-1}]，そして基本量は M, L, T の 3 個である．したがって無次元パラメータは 2 個あるはず．二つの無次元パラメータを次のように表す．

$$p_1 = UL^a n^b r^c, \qquad p_2 = D r^x U^y L^z$$

p_1 の基本量の次数に関して次のような関係が得られる．

$$\text{M: } c=0,\ \text{L: } 1+a+2b-3c=0,\ \text{T: } -1-b=0$$

$$a=1,\ b=-1,\ c=0$$

したがって
$$p_1 = \frac{UL}{n}$$

同様に
$$p_2 = \frac{D}{rU^2L^2}$$

無次元パラメータは，$\dfrac{UL}{n}$ および $\dfrac{D}{rU^2L^2}$ の二つ．（一つ 5 点，両方で 10 点）

2) 実物および模型の変数をそれぞれ添え字 p および m をつけて表すことにする．

U_p = 時速 108 km = 108,000 m/3600 s = 30 m/s

$$L_p = 10L_m,\quad r_p = r_m,\quad n_p = n_m$$

実物と模型で $\dfrac{UL}{n}$ を一致させる.

$$\frac{U_p L_p}{n_p} = \frac{U_m L_m}{n_m} \qquad \text{(式 1)}$$

$$\frac{30 \times 10L_m}{n_m} = \frac{U_m L_m}{n_m}$$

したがって　$U_m = 30 \times 10 = 300$ (m/s) （4 点）

またこのとき $\dfrac{D}{rU^2L^2}$ も一致するから

$$\frac{D_p}{r_p U_p^2 L_p^2} = \frac{D_m}{r_m U_m^2 L_m^2} \qquad \text{(式 2)}$$

$$\frac{D_p}{30^2 \times (10L_m)^2} = \frac{D_m}{300^2 L_m^2}$$

$D_p = D_m$ すなわちプロトタイプとモデルに働く抗力は等しい.（4 点）

3) 水を使うと密度および動粘性係数が変化するので注意.

$$U_p = 30 \text{ m/s},\quad L_p = 10L_m,\quad r_p = 1.2 \text{ kg/m}^3,\quad r_m = 1000 \text{ kg/m}^3$$

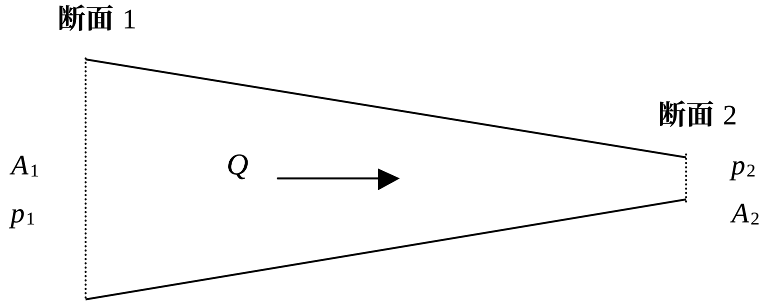
$$n_p = 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2\text{/s},\quad n_m = 1.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2\text{/s}$$

これらの値を式 1 および式 2 に代入すると $U_m = 20$ m/s (4 点), $D_p = 0.27D$ (3 点)となることがわかる.

平成 14 年度水理学 B 及び同演習試験（H14.7.17）

番号	名前

$\boxed{2}$ 下図に示すようなパイプを流量 Q の水が流れている．パイプの断面 1 および 2 の間にに働く<u>力の方向と大きさを求めよ．</u>力の大きさは A_1 および A_2，p_1，p_2，Q，ρ で表せ．ρ は水の密度である．ここで断面 1 および 2 における断面積をそれぞれ A_1 および A_2，圧力をそれぞれ p_1 および p_2 とし，$A_1>A_2$ とする．（25 点）



（解答）

右方向を正とする．断面 1，2 間における流速をそれぞれ V_1 および V_2 とすると，運動量の増加量は

$$\rho Q V_2 - \rho Q V_1$$

断面 1，2 間のパイプに働く右方向の力を F とすると，流れが受ける力積は

$$p_1 A_1 - p_2 A_2 - F$$

（作用反作用の法則からパイプの受ける力と流れの受ける力は, 大きさは等しく方向は逆になることに注意.）

運動量の増加分が受けた力積に等しいから

$$\rho Q V_2 - \rho Q V_1 = p_1 A_1 - p_2 A_2 - F$$

流量の保存則から

$$V_1 = Q / A_1, \quad V_2 = Q / A_2$$

したがって

$$F = \rho Q^2 / A_1 - \rho Q^2 / A_2 + p_1 A_1 - p_2 A_2 \qquad \text{(式 3)}$$

（ここまでできて 15 点）

方向については直感的に右方向である．（3 点）

しかし本当に右方向か？

ベルヌーイの定理より

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{Q^2}{2A_1^2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{Q^2}{2A_2^2}$$

変形して

$$p_1 = p_2 + rQ^2\left(\frac{1}{2A_2^2} - \frac{1}{2A_1^2}\right) = p_2 + rQ^2\left(\frac{A_1^2 - A_2^2}{2A_1^2A_2^2}\right) = p_2 + rQ^2(A_1 - A_2)\left(\frac{A_1 + A_2}{2A_1^2A_2^2}\right)$$

上式を式 3 に代入して

$$\begin{aligned}
F &= -rQ^2\left(\frac{A_1 - A_2}{A_1A_2}\right) + rQ^2(A_1 - A_2)\left(\frac{A_1 + A_2}{2A_1^2A_2^2}\right)A_1 + p_2A_1 - p_2A_2 \\
&= rQ^2(A_1 - A_2)\left(\frac{A_1 + A_2}{2A_1A_2^2} - \frac{1}{A_1A_2}\right) + p_2(A_1 - A_2) \\
&= rQ^2(A_1 - A_2)\left(\frac{A_1 + A_2 - 2A_2}{2A_1A_2^2}\right) + p_2(A_1 - A_2) \\
&= rQ^2\frac{(A_1 - A_2)^2}{2A_1A_2^2} + p_2(A_1 - A_2)
\end{aligned}$$

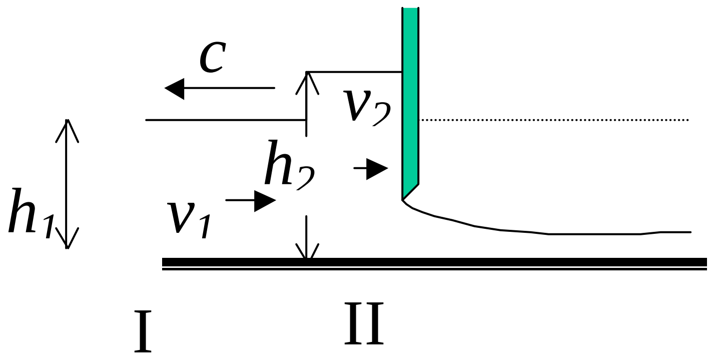
$A_1 > A_2$ であるから，F は必ず正である．したがって力の方向は右方向である．

（ここまでできて 25 点）

平成14年度水理B及び同演習試験（H14.7.17）

番号	名前

$\boxed{3}$　下図のように定常等流で流れている単位幅水路にゲートの一部を閉めた．その際に発生した段波の波速を求めたい．



(1)段波と一緒に動く座標系で考えると，段波は静止しているように見える．この座標系でみた場合の I〜II 区間の連続式はどうなるか？
(2)I〜II の領域に働く力の差は，静水圧のみを考えるといくらか？
(3)移動座標系で見た I〜II 間の運動量の差はいくらか？
(4)今，v_1 が 1.5m/s，h_1 が 1.0m，h_2 が 1.5m のとき，段波の波速 c はいくらか？

(1) $h_1(v_1+c)=h_2(v_2+c)$，$h_1v_1-h_2v_2=c(h_2-h_1)$　　5点

(2) 力の差$\Delta F=\frac{1}{2}rgh_1^2-\frac{1}{2}rgh_2^2=\frac{1}{2}rg(h_1^2-h_2^2)$　　5点　向き逆−1点

(3)運動量の差$\Delta M = r(c+v_2)^2h_2 - r(c+v_1)^2h_1$

$= rh_1(c+v_1)(v_2-v_1)$　　5点　基本OKで3点.

(4) (1)の式より$v_2=(h_1v_1-ch_2+ch_1)/h_2$

(2)と(3)の式より$\frac{1}{2}rg(h_1^2-h_2^2)= rh_1(c+v_1)(v_2-v_1)$

両式から v_2 を消去すると

$$\frac{1}{2}g(h_1^2-h_2^2)=h_1(c+v_1)(\frac{h_1}{h_2}v_1-\frac{c}{h_2}(h_2-h_1)-v_1)$$

$$=\frac{h_1}{h_2}(c+v_1)(c_1+v_1)(h_1-h_2)$$

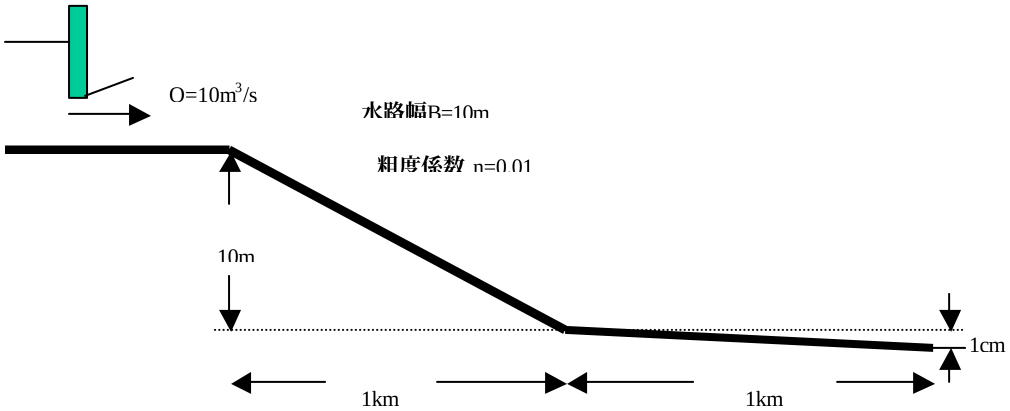
$$\frac{gh_2}{2h_1}(h_1+h_2)=(c+v_1)^2$$

$C=\sqrt{\frac{gh_1}{2h}(h_1+h_2)}-v_1$　<u>＝ 2.8m/s</u>　単位なし-1点

平成 14 年度水理 B 及び同演習試験（H14.7.17）

番号	名前

$\boxed{4}$ 毎秒 10m³ の水を放流しているダム下流側水路縦断図は下の図のようになっている．この場合の水面形を求めよ．なお，水路は幅広矩形水路と考えられ，マニングの粗度係数は 0.01，水路幅は 10m 一定である．



限界水深は Fr=1 のときの水深だから $\sqrt{gh_c}=v$，つまり $h_c=v^2/g=Q^2/B^2/h_c^2/g$

よって，$h_c{}^3=Q^2/B^2/g$， $h_c=\sqrt[3]{\dfrac{100}{9.8\times100}}=0.46m$ （5 点） 単位がなければ-1 点

マニングの式を用いると $Q=vBh=\dfrac{1}{n}h^{5/3}BI^{1/2}$

$$h_n=\left(\frac{nQ}{BI^{1/2}}\right)^{3/5}$$

$$=\left(\frac{0.01\times10}{10\times0.01^{1/2}}\right)^{3/5}=0.25m \quad 5\text{ 点}$$

$$=\left(\frac{0.01\times10}{10\times(0.01/1000)^{1/2}}\right)^{3/5}=2.00m \quad 5\text{ 点}$$

ジャンプ 5 点．等流がわかっていれば 5 点．位置のずれ-2 点．ジャンプの位置だめ-2 点